ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE

MATHEMATIQUES II
(3 pages dactylographiées) — **Centre à l'étranger**

N.B. Les candidats sont priés de respecter scrupuleusement les notations fournies par l'énoncé.

Soit (σ) un espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormal direct $\rho = (O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désigne par (x, y, z) le triplet des coordonnées du point générique de (σ) dans le repère ρ. On se donne les droites α et β de (σ) d'équations respectives $y = o$, $z = h$ et $x = o$, $z = -h$ $(h > o)$, ainsi que le cercle γ de (σ) d'équation $z = o$, $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > o)$. A tout $t \in \mathbb{R}$ on associe le point $M(t)$ de γ qui admet $(r \cos t, r \sin t, o)$ pour coordonnées dans ρ.

Partie 1 - (Géométrie).

I.1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe une unique droite $D(t)$ de (σ) contenant $M(t)$ et rencontrant α et β, en des points que l'on désignera par $A(t) \in \alpha$ et $B(t) \in \beta$.

Que peut-on dire de la longueur du segment $[A(t), B(t)]$?

.../...

Donner les composantes dans la base ρ du vecteur unitaire $\vec{J}(t)$ de la droite D(t), orientée de B(t) vers A(t) ; on fera intervenir l'angle $\varphi = \text{Arc tg } \frac{h}{r}$, dont on donnera une interprétation géométrique.

I.2. Soit S la nappe réglée engendrée par D(t) quand t décrit $\mathbb{R}$.

I.2.1. Montrer que S admet une représentation paramétrique de la forme :

$(t, \lambda) \mapsto P(t, \lambda)$ avec $\overrightarrow{OP}(t, \lambda) = \overrightarrow{OM}(t) + \lambda \vec{J}(t)$

I.2.2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note E_λ l'intersection de S et du plan d'équation $z = \lambda \sin \varphi$. Discuter la nature de E_λ. Calculer l'aire intérieure à E_λ.

Calculer le volume intérieur à S', partie de S engendrée par le segment de droite [A(t), B(t)] quand t décrit $\mathbb{R}$.

I.2.3. On fixe $t \in \mathbb{R}$, et donc D(t). Montrer que (sauf pour des valeurs exceptionnelles de t que l'on précisera) le plan normal à la courbe E_λ en son point d'intersection avec D(t) pivote, lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, autour d'une droite V(t) dont on donnera la direction et le point d'intersection N(t) avec le plan $(O ; \vec{I}, \vec{j})$.

Quelle relation simple existe-t-il entre O, M(t) et N(t) ?

Que se passe-t-il pour les valeurs exceptionnelles de t ?

I.3. Pour quels couples (t, λ) la nappe S admet-elle un plan tangent au point $P(t, \lambda)$?

I.4.1. On fixe $t \in \mathbb{R}$. Montrer que (sauf pour des valeurs exceptionnelles de t que l'on précisera) il existe un unique point Q(t) de D(t) en lequel S admet un plan tangent parallèle à la droite $(O ; \vec{k})$. Donner les coordonnées de Q(t) dans le repère ρ.

Pour chaque valeur exceptionnelle t_o de t, on adoptera : $Q(t_o) = \lim_{t \to t_o} Q(t)$.

I.4.2. Soient t et t_1 des réels distincts modulo 2π. Les droites D(t) et $D(t_1)$ peuvent elles être parallèles ? Quelle relation doivent vérifier t_1 et t pour qu'elles soient concourantes ? Où est alors leur point commun ?

On fixe t, et pour tout $t_1 \neq t$, on note H_{t_1} le pied sur D(t) de la perpendiculaire commune à D(t) et $D(t_1)$.

Montrer : $\lim_{t_1 \to t} H_{t_1} = Q(t)$.

On montrera d'abord que, dans la représentation paramétrique du I.2.1 le point H_{t_1} correspond à la valeur $(t, \mu(t_1))$ du paramètre (t, λ) avec :

$$\mu(t_1) = \frac{\overrightarrow{M(t)\,M(t_1)} \cdot (\vec{J}(t) - \cos\theta\, \vec{J}(t_1)}{\sin^2\theta}$$

où θ est l'angle de $\vec{J}(t)$ et de $\vec{J}(t_1)$, et on en déduira :

$$\lim_{t_1 \to t} \mu(t_1) = -\frac{\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) \cdot \frac{\overrightarrow{dJ}}{dt}(t)}{\left\| \frac{\overrightarrow{dJ}}{dt}(t) \right\|^2}$$

I.5. Soit Γ la courbe décrite par Q(t) lorsque t décrit $\mathbb{R}$. On note A'(t), B'(t), D'(t), Q'(t), Γ' les projections orthogonales A(t), B(t) D(t), Q(t), Γ sur le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

I.5.1. Faire une figure plane représentant le cercle γ, une position de D(t) et les positions correspondantes de N(t) et de Q'(t). Que peut-on dire de D(t) et de la droite qui contient N(t) et Q'(t) ?

.../...

I.5.2. Comparer D'(t) et la tangente en Q'(t) à Γ'. Tracer Γ'.

I.6. Calculer la longueur ℓ de Γ (on introduira $\psi = \text{Arc tg } \frac{2h}{3r}$).

- Montrer qu'il existe une direction fixe avec laquelle toutes les tangentes à Γ font le même angle.

- Calculer la courbure c(t) et la torsion τ(t) de Γ au point Q(t) ; on se limitera à $t \in]o, \pi/2[$; on fera en sorte d'avoir $c(t) > o$; on indiquera la convention adoptée pour le signe de la torsion (on utilisera encore ψ).

Partie 2. (Cinématique)

Dans cette partie t désigne le temps. L'espace (σ) et le repère ρ sont fixes. (Σ) désigne un solide mobile par rapport à (σ), schématisé par deux tiges rectilignes D et G, orthogonales, soudées en un point C ; la tige G glisse contre la droite (O, $\vec{k}$) en lui restant orthogonale ; la tige D glisse contre α , β , et γ , le point commun à D et γ ayant à l'instant t les coordonnées (r cost, r sint, o) dans le repère ρ.

2.1. Montrer que la position de D dans (σ) à l'instant t est précisément la droite D(t) introduite dans la partie 1.

Montrer que la position C(t) de C dans (σ) à l'instant t est le pied sur D(t) de la perpendiculaire commune aux droites D(t) et (O, $\vec{k}$) ; donner les coordonnées de C(t) dans le repère ρ.

2.2 Montrer qu'il existe un repère orthonormal direct (C ; $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$) de (Σ) dont la position à l'instant t dans (σ) est le repère (C(t) ; $\vec{I}(t)$, $\vec{J}(t)$, $\vec{K}(t)$) de (σ) tel que $\vec{I}(t) = \vec{I}$ sint + $\vec{J}$ cost, que $\vec{J}(t)$ soit le vecteur unitaire de D(t) défini au I.1, et que $\vec{K}(t) = \vec{I}(t) \wedge \vec{J}(t)$.

Montrer qu'un autre repère orthonormal direct de (Σ) est $\mathcal{R} = (C ; \vec{I}, \vec{J}_1, \vec{k})$, où $\vec{J}_1 = \vec{k} \wedge \vec{I}$.

2.3. Dans le mouvement de (Σ) par rapport à (σ) on note $\vec{\Omega}(t)$ le vecteur rotation, $\Delta(t)$ l'axe (de rotation et de glissement) et $\vec{U}(t)$ le vecteur vitesse de glissement à l'instant t.

2.3.1. Déterminer $\vec{\Omega}(t)$ et $\vec{U}(t)$; calculer les coordonnées dans le repère ρ du point d'intersection W(t) de $\Delta(t)$ et du plan (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) : montrer qu'il existe une relation simple entre les points N(t), Q'(t) et W(t) ; adjoindre W(t) à la figure du 1.5.1.

Quel est, à l'instant t, le point de la tige D dont la norme de la vitesse est minimale?

2.3.2. Déterminer (par une équation polaire), et construire la courbe L décrite par W(t) quand t parcourt R.

Quelle est la nature de la nappe engendrée, quand t parcourt R, par $\Delta(t)$ dans l'espace fixe (σ) ?

2.3.3. On peut considérer $\Delta(t)$ comme la position dans (σ), à l'instant t, d'une droite Δ_t liée à Σ. Donner une équation de Δ_t dans le repère $\mathcal{R}$. En déduire une équation et la nature de la nappe engendrée, quand t parcourt R, par Δ_t dans l'espace mobile (Σ).